

УДК 532.54.001

А.Г. Бутенко, канд. техн. наук, доц. Одес. нац. политехн. ун-т

## ОЦЕНКА ВЗАИМНОГО ВЛИЯНИЯ ТЕПЛОВЫХ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ В ТРУБАХ КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЯ

*О.Г. Бутенко. Оцінка взаємного впливу теплових і гідродинамічних процесів при ламінарній течії в трубах кільцевого перерізу.* Запропоновано просту математичну модель в'язкісноградієнтної ламінарної течії в трубі кільцевого перерізу, яка дозволяє більш точно розраховувати гідродинамічні і теплові характеристики потоку.

*A.G. Butenko. Estimation of mutual influence of thermal and hydrodynamical processes at laminar current in pipes of ring section.* The simple mathematical model of viscosity-gradient laminar current in a pipe of ring section which allows to count more precisely hydrodynamical and thermal characteristics of the stream is offered.

Гидродинамические характеристики течения в каналах с теплообменом во многом определяются тепловыми процессами, поскольку поле вязкости существенно зависит от поля температуры. Однако, в настоящее время, при инженерных расчетах влияние тепловых процессов, т.е. неравномерности распределения вязкости, на гидродинамические характеристики учитываются далеко не всегда. Лишь в сравнительно небольшой части многочисленных известных работ, например [1...6], наряду с рассмотрением влияния неравномерности распределения свойств жидкости на теплоперенос, получены некоторые решения для гидравлического сопротивления. Кроме того, рассмотрение вязкостноградIENTных течений практически полностью отсутствует. Поэтому представляется необходимым получение возможно более общего и простого описания ламинарного стабилизированного течения жидкости в трубе кольцевого сечения с поперечным градиентом вязкости. Такая задача имеет определенное практическое значение, поскольку напорные трубопроводы кольцевого поперечного сечения весьма часто встречаются в теплообменных аппаратах (например, схема "труба в трубе", трубка Фильда), а при высоких значениях температурных напоров нарушение вязкостной однородности потока в них может быть весьма существенным.

Одним из возможных и, вероятно, наиболее естественных путей решения гидродинамической задачи ламинарного вязкостноградIENTного течения является интегрирование системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса. Для этого необходимо аналитическое задание поля вязкости. В общем случае  $\mu = \varphi(\psi(r))$ , где  $\psi$  описывает распределение температуры и определяется характером термодинамического процесса, а  $\varphi$  — зависимость вязкости от температуры (определяется родом жидкости). Функция  $\psi$  применительно к ламинарным потокам кольцевого сечения имеет аналитическое представление [1]: для граничных условий первого рода

$$t = t_1 + (t_2 - t_1)\theta_1(r), \quad (1)$$

а для граничных условий второго рода,

$$t = t_1 + \frac{q_1 R_1 + q_2 R_2}{\lambda} \theta_{II}(r), \quad (2)$$

где  $r$  — текущее значение радиуса;

$\lambda$  — коэффициент теплопроводности;

$R_1$  и  $R_2$  — радиусы внутренней и внешней стенки;

$t_1$  и  $t_2$  — температуры у внутренней и внешней стенки;

$q_1$  и  $q_2$  — плотности теплового потока у внутренней и внешней стенки;  
 $\theta_1$  и  $\theta_{II}$  — функции, характеризующие поле относительных температур в случае граничных условий первого и второго рода.

Из-за громоздкости этих функций использовать приведенные соотношения в сочетании с  $\varphi$  при интегрировании системы уравнений Навье-Стокса не представляется возможным. Поэтому следует воспользоваться непосредственной аппроксимацией зависимости вязкости от радиуса  $\mu = f(r)$ , полученной с использованием справочных данных зависимости вязкости от температуры и поля температур в рассматриваемом потоке, рассчитанного исходя из термодинамических характеристик потока по (1) или (2).

Исходя из структуры исходного дифференциального уравнения, записанного для стационарного равномерного стабилизированного ламинарного потока кольцевого сечения [1],

$$\frac{dP}{dx} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \mu(r) r \frac{du}{dr} \right),$$

и его первого интегрирования

$$\frac{du}{dr} = \frac{dP}{2dx} \frac{r}{\mu(r)} + \frac{A}{r} \frac{1}{\mu(r)},$$

аппроксимировать поле вязкости удобно в виде полинома [1]

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \sum_{n=1}^s k_n r^n, \quad (3)$$

где  $\mu_1$  — динамическая вязкость у внутренней стенки.

Тогда после второго интегрирования

$$u = \frac{dP}{2dx} \left( \frac{r^2}{2\mu_1} + \sum_{n=1}^s k_n \frac{r^{n+2}}{n+2} \right) + A \left( \frac{\ln r}{\mu_1} + \sum_{n=1}^s k_n \frac{r^n}{n} \right) + B = \frac{dP}{2dx} W + AV + B, \quad (4)$$

где  $W$  и  $V$  — функции, используемые для краткости, вид которых понятен из (6).

Постоянные интегрирования находятся из условия равенства скорости нулю на стенках канала

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{dP}{2dx} \left( \frac{R_1^2}{2\mu_1} + \sum_{n=1}^s k_n \frac{R_1^{n+2}}{n+2} \right) + A \left( \frac{\ln R_1}{\mu_1} + \sum_{n=1}^s k_n \frac{R_1^n}{n} \right) + B = \frac{dP}{2dx} W_1 + AV_1 + B \\ 0 &= \frac{dP}{2dx} \left( \frac{R_2^2}{2\mu_1} + \sum_{n=1}^s k_n \frac{R_2^{n+2}}{n+2} \right) + A \left( \frac{\ln R_2}{\mu_1} + \sum_{n=1}^s k_n \frac{R_2^n}{n} \right) + B = \frac{dP}{2dx} W_2 + AV_2 + B \end{aligned} \right\}.$$

В случае неизменных вдоль течения условий  $dP/dx = \text{const}$  и дифференциал можно заменить изменением давления, приходящимся на единицу длины  $-\Delta P/l$  (знак “-” указывает на то, что давление вдоль канала понижается). Тогда постоянные интегрирования

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\frac{\Delta P}{2l} (W_2 - W_1)}{V_2 - V_1} \\ B &= \frac{\Delta P}{2l} \left[ W_1 - V_1 \frac{(W_2 - W_1)}{(V_2 - V_1)} \right] \end{aligned} \right\}.$$

Таким образом, получено одно из возможных решений описания поля скоростей вязкостно-градиентного ламинарного течения в кольцевых каналах. Это решение является исходным для полного гидродинамического анализа течения, а именно, для определения расхода

$$Q = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \left( -\frac{\Delta P}{2l} W + AV + B \right) r dr = -\frac{\Delta P}{l} \pi \left( \frac{R_2^4 - R_1^4}{8\mu_1} + \sum_{n=1}^s \frac{k_n (R_2^{n+4} - R_1^{n+4})}{(n+4)(n+2)} \right) +$$

$$+ \frac{A2\pi}{\mu_1} \left( \frac{R_2^2}{2} \ln R_2 - \frac{R_1^2}{2} \ln R_1 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{4} + \sum_{n=1}^s \frac{k_n (R_2^{n+2} - R_1^{n+2})}{n(n+2)} \right) + \frac{B}{2} (R_2^2 - R_1^2), \quad (5)$$

средней скорости  $v$ , коэффициента гидравлического сопротивления

$$C = \frac{2(R_2 - R_1)^2 \frac{\Delta P}{l} \pi (R_2^2 - R_1^2)}{\mu_{\text{ср}} Q} \quad (6)$$

и потерь давления

$$\Delta P = \frac{C}{\text{Re}} \frac{l}{(R_2 - R_1)} \frac{\rho v^2}{2} = \frac{C \mu_{\text{ср}} Q l}{2(R_2 - R_1)^2 \pi (R_2^2 - R_1^2)},$$

где  $\rho$  — плотность жидкости;

$$\mu_{\text{ср}} = (\mu_1 + \mu_2) 0,5;$$

$$\text{Re} = \frac{v(R_2 - R_1) \rho}{\mu_{\text{ср}}}.$$

Последовательность использования приведенных соотношений определяется характером поставленной гидродинамической задачи, т.е. тем, какая величина (расход или перепад давления) подлежит определению.

Поскольку существует бесконечное многообразие сочетаний геометрических параметров канала и распределения температур для достаточно широкого круга капельных жидкостей и газов, то не представляется возможным получить универсальные соотношения, характеризующие вязкостноградиентное течение, даже в безразмерном виде (как это сделано для каналов плоского и кольцевого сечения при линейном распределении вязкости [7, 8]). Поэтому в качестве демонстрации и анализа возможных результатов решения представляет интерес следующий пример.

Пусть машинное масло, расход которого подлежит определению, с постоянной плотностью  $\rho = 850 \text{ кг/м}^3$  протекает по каналу кольцевого сечения с  $R_1 = 0,15 \text{ м}$  и  $R_2 = 0,2 \text{ м}$  под действием удельного перепада давления  $\Delta P/l = 230 \text{ Па/м}$  (течение равномерное ламинарное стабилизированное). Плотности тепловых потоков  $q_2 = 268 \text{ Вт/м}^2$ ,  $q_1 = 0$ , коэффициент теплопроводности  $\lambda = 0,15 \text{ Вт/(м}\cdot\text{°C)}$ , температура внутренней стенки  $t_1 = 50 \text{ °C}$ , коэффициенты динамической вязкости у внутренней стенки  $\mu_1 = 0,136 \text{ Па}\cdot\text{с}$ . Воспользовавшись (2) и графиком  $\mu = \psi(t)$  [9], получаем распределение температур и вязкости в сечении (при этом  $t_2 = 100 \text{ °C}$ ,  $\mu_2 = 0,017 \text{ Па}\cdot\text{с}$ ) (рис. 1), из которого видно, что течение происходит в условиях неравномерного (близкого к линейному) распределения вязкости. Среднее арифметическое значение вязкости  $\mu_{\text{ср}} = 0,0765 \text{ Па}\cdot\text{с}$ , степень неравномерности поля вязкости  $m = \mu_1/\mu_2 = 8$ .

Определив коэффициенты полинома (3), например, с использованием математического пакета Mathcad, и выполнив расчеты, можно представить распределение скоростей в сечении, в относительном виде (см. рисунок 1). Здесь же приведена эпюра относительных скоростей вязкостнооднородного потока, рассчитанной по  $\mu_{\text{ср}}$ .

Расход, рассчитанный по (5), составляет  $Q = 0,04785 \text{ м}^3/\text{с}$ , а коэффициент сопротивления, рассчитанный по (6),  $C = 17,3$ . Сравним эти результаты с наиболее простым методом расчета по среднеарифметической вязкости и классической формуле распределения скоростей [9]. В этом случае  $Q_{m=1} = 0,03448 \text{ м}^3/\text{с}$ ,  $C_{m=1} = 23,96$ , т.е. погрешность упрощенного расчета по расходу и коэффициенту сопротивления составляет 27,9 %. Если среднее значение вязкости определить более точно — путем усреднения по площади

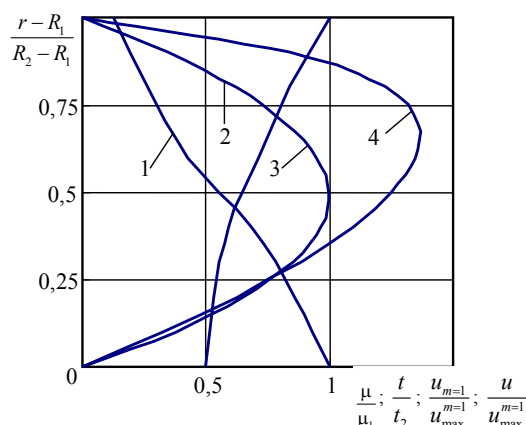


Рис. 1. Распределение по сечению кольцевого канала вязкости  $\frac{\mu}{\mu_1}$  (1), температуры  $\frac{t}{t_2}$  (2) и скорости при вязкостнооднородном  $\frac{u_{m=1}}{u_{max}^{m=1}}$  (3) и вязкостноградиентном  $\frac{u}{u_{max}^{m=1}}$  (4) течении

$$\mu_{cp} = \frac{2\pi \int_{R_1}^{R_2} r \mu(r) dr}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{2\pi \int_{R_1}^{R_2} r \frac{\mu_1}{1 + \sum_{n=1}^s k_n r^n} dr}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = 0,07161 \text{ Па}\cdot\text{с},$$

то  $Q_{m=1} = 0,03684 \text{ м}^3/\text{с}$ ,  $C = 18,5$ , т.е. отклонение по расходу и сопротивлению составит 23 %, что также нельзя считать приемлемым для инженерных расчетов.

Предложенная модель описания поля скоростей с учетом поперечного градиента вязкости позволяет проводить более точно не только гидравлический, а и тепловой расчет. Так, использованные выше соотношения (1) и (2), полученные Б.С. Петуховым [1], основываются на распределении скоростей в кольцевом канале, справедливом для вязкостнооднородного, т.е. изотермического течения. Это не соответствует сути рассмотренной задачи и приводит к определенной погрешности итоговых соотношений. Применение (4) дает возможность более точного определения распределения плотности теплового потока и относительной температуры в кольцевом канале.

Рассмотрим граничные условия первого рода. Когда поддерживается постоянная температура внутренней стенки  $t_1$ , а наружная стенка теплоизолирована ( $q_2 = 0$ ), то температура и плотность теплового потока распределяются по законам

$$\theta_1 = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{\int_{R_1}^r \frac{q}{q_1} dr}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{q_1} dr}, \quad \frac{q}{q_1} = \frac{R_1}{r} \frac{\int_{R_1}^{R_2} \theta_1 \frac{u(r)}{v} r dr}{\int_{R_1}^{R_2} \theta_1 \frac{u(r)}{v} r dr}.$$

Когда поддерживается постоянной температура внешней стенки  $t_2$ , а внутренняя стенка теплоизолирована ( $q_1 = 0$ ), то

$$\theta_1' = \frac{t - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{\int_{R_2}^r \frac{q}{q_2} dr}{\int_{R_2}^{R_1} \frac{q}{q_2} dr}, \quad \frac{q}{q_2} = \frac{1}{r} \frac{\int_{R_1}^r \theta_{II} \frac{u(r)}{v} r dr}{\int_{R_1}^{R_2} \theta_{II} \frac{u(r)}{v} r dr}.$$

Оценим степень влияния вязкостной неоднородности на примере случая  $\text{grad} \mu = \text{const}$ . Для этого на рис.2...5 представлены графики соответствующие  $\mu = \text{const}$  и двум разным соотношениям радиусов, полученные Петуховым, и кривые, соответствующие положительному ( $m=0,0909$ ) и отрицательному ( $m = 11$ ) градиентам вязкости. Считалось, что течение происходит при равном перепаде давления и одинаковом среднем по сечению значении вязкости.

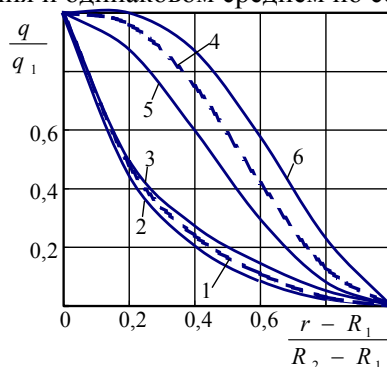


Рис. 2. Распределение плотности теплового потока в трубе обогреваемой (охлаждаемой) изнутри  $R_1/R_2 = 1/6$ :  $\mu = \text{const}$  (1);  $m=0,0909$  (2);  $m=11$  (3);  $R_1/R_2 = 0,9$ :  $\mu = \text{const}$  (4);  $m=0,0909$  (5);  $m=11$  (6)

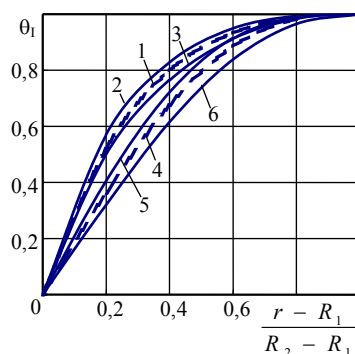


Рис. 3. Распределение температуры в трубе обогреваемой (охлаждаемой) изнутри  $R_1/R_2 = 1/6$ :  $\mu = \text{const}$  (1);  $m=0,0909$  (2);  $m=11$  (3);  $R_1/R_2 = 0,9$ :  $\mu = \text{const}$  (4);  $m=0,0909$  (5);  $m=11$  (6)

Для граничных условий второго рода

$$\theta_{II} = \frac{(t - t_1)\lambda}{q_1 R_1 + q_2 R_2} = \frac{2}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} \int_{R_1}^r \frac{1}{R_1} \left( \int_{R_1}^r \frac{u(r)}{v} \frac{r}{R_2^2} dr \right) dr - N \ln \left( \frac{r}{R_1} \right),$$

где  $N = \frac{q_1 R_1}{q_1 R_1 - q_2 R_2}$ .

Подстановка в это выражение закона распределения скоростей при постоянном градиенте вязкости и численное решение позволяют получить распределение относительной температуры по сечению кольцевого канала (на рис. 6 показаны графики, соответствующие  $R_1/R_2 = 0,75$ ).

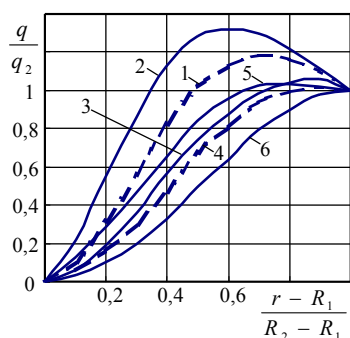


Рис. 4 Распределение плотности теплового потока в трубе обогреваемой (охлаждаемой) снаружи:  $R_1/R_2 = 1/6$ :  $\mu = \text{const}$  (1);  $m = 0,0909$  (2);  $m = 11$  (3);  $R_1/R_2 = 0,9$ :  $\mu = \text{const}$  (4);  $m = 0,0909$  (5);  $m = 11$  (6)

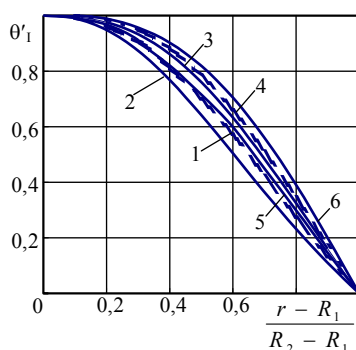


Рис. 5 Распределение температуры в трубе обогреваемой (охлаждаемой) снаружи:  $R_1/R_2 = 1/6$ :  $\mu = \text{const}$  (1);  $m = 0,0909$  (2);  $m = 11$  (3);  $R_1/R_2 = 0,9$ :  $\mu = \text{const}$  (4);  $m = 0,0909$  (5);  $m = 11$  (6)

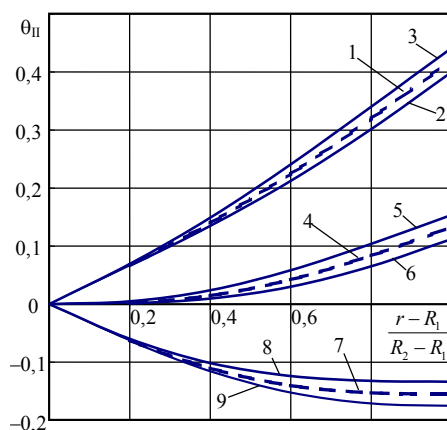


Рис. 6 Распределение температуры по сечению кольцевой трубы.  $N = -1$  (подвод тепла на внешней, а отвод на внутренней стенках или подвод тепла на внутренней, а отвод на внешней стенках, причем  $|q_2 R_2| = 2|q_1 R_1|$ ):  $\mu = \text{const}$  (1);  $m = 0,0909$  (2);  $m = 11$  (3);  $N = 0$  (подвод тепла только на внешней стенке):  $\mu = \text{const}$  (4);  $m = 0,0909$  (5);  $m = 11$  (6).  $N = 1$  (подвод тепла только на внутренней стенке):  $\mu = \text{const}$  (7);  $m = 0,0909$  (8);  $m = 11$  (9)

Следует понимать, что в общем случае получаемые с использованием предложенной математической модели значения местных скоростей и коэффициентов сопротивления являются локальными. Если рассматривается задача с незначительным изменением поля температур вдоль канала (как в рассмотренном выше примере), то модель обеспечивает приемлемую точность. Когда же поля температуры, а значит и вязкости вдоль канала изменяются существенно,

то величина  $dP/dx$  также будет переменной. В этом случае массовый расход в сечении с координатой  $x$

$$Q_m = 2\pi\rho(x) \int_{R_1}^{R_2} \left( \frac{dP}{2dx} W + A'V + B' \right) r dr ,$$

а продольный градиент давления

$$\frac{dP}{dx} = \frac{Q_m}{2\pi\rho(x) \int_{R_1}^{R_2} \left( \frac{1}{2} W + A'V + B' \right) r dr} ,$$

где

$$\left. \begin{aligned} A' &= \frac{1}{2} \frac{(W_2 - W_1)}{V_1 - V_2} \\ B' &= -\frac{1}{2} \left[ W_1 - V_1 \frac{(W_2 - W_1)}{(V_2 - V_1)} \right] \end{aligned} \right\} .$$

Тогда давление вдоль канала изменяется по закону

$$P = \int \frac{Q_m}{2\pi\rho(x) \int_{R_1}^{R_2} \left( \frac{1}{2} W + A'V + B' \right) r dr} dx .$$

Поскольку теплообменные аппараты редко характеризуются значительной протяженностью прямых участков стабилизированного течения, то учитывать переменность поля вязкости вдоль потока для подавляющего большинства случаев нет необходимости.

Таким образом, предложенная математическая модель подтвердила известный факт зависимости конфигурации эпюры скоростей от характера распределения вязкости и позволяет просто проводить гидродинамические расчеты неизотермических ламинарных потоков кольцевого сечения с учетом фактической зависимости  $\mu = f(r)$ . На ее основе также можно более точно определять распределение температуры и плотности теплового потока при граничных условиях первого и второго рода. Проведенные расчеты показывают, что при больших температурных напорах для избежания существенных погрешностей нельзя пренебрегать вязкостной неоднородностью неизотермических потоков как при их гидравлическом, так и тепловом расчетах.

## Литература

1. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. — 410 с.
2. Петухов Б.С. Теплообмен в ядерных энергетических установках: Учеб. пособие для вузов / Петухов Б.С., Генин Л.Г., Ковалев С.А. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Энергоатомиздат, 1986. — 472 с.
3. Кутателадзе С.С. Теплопередача и гидродинамическое сопротивление: Справ. пособие. — М.: Энергоатомиздат, 1990. — 367 с.
4. Виленский В.Д., Петухов Б.С., Харин Б.Е. Теплообмен и сопротивление в трубах при ламинарном течении газа с переменными физическими свойствами // Теплообмен и физическая гидродинамика. — М.: Наука, 1973. — С. 5 — 22.
5. Попов В.Н. Теплопередача, адиабатическая энтальпия (температура) стенки и гидравлическое сопротивление при турбулентном и ламинарном течении в круглой трубе сжимаемой жидкости // Теплофизика высоких температур. — 1972. — Т. 10, №3. — С. 572 — 586.
6. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при течении в трубах диссоциирующего азотного тетраксина / Петухов Б.С., Михов В.К. // Теплофизика высоких температур. — 1977. — Т. 15, № 4, — С. 785 — 794.

7. Бутенко А.Г. Влияние поперечного градиента вязкости на характеристики ламинарного потока в трубе кольцевого сечения // Тр. Одес. политехн. ун-та. — Одесса, 2005. — Вып. 1(23). — С. 185 — 188.
  8. Бутенко А.Г. Влияние поперечного градиента вязкости на гидравлические характеристики плоского ламинарного течения // Тр. Одес. политехн. ун-та. — Одесса, 2004. — Вып. 2(22). — С. 237 — 241.
  9. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика: Учеб. для вузов по специальности “Гидравл. машины и средства автоматизации”. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1987. — 440 с.
-