УДК 517.91

Р.Г. Грабовська, канд. фіз.-мат. наук, доц., Одес. нац. ун-т ім. І.І. Мечникова,
Д.В. Буряк, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Н.В. Крапива, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Одес. нац. політехн. ун-т

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З МАЙЖЕ ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Р.Г. Грабовская, Д.В. Буряк, Н. В. Крапива. **Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений первого порядка с почти постоянными коэффициентами.** Исследуется асимптотическое поведение решений некоторых систем дифференциальных уравнений с почти постоянными коэффициентами. Получены достаточные условия существования таких решений для указанных систем. При решении этого вопроса были использованы геометрические методы.

R.G. Grabovskaya, D.V. Buryak, N.V. Krapiva. **Asymptotical conduct of solutions of systems of the first order differential equations with almost constant coefficients.** The asymptotical conduct of solutions of some system of the differential equations with almost constant coefficients is investigated. The sufficient conditions of existence of such solutions for the specified systems are obtained. The geometrical methods were used in solving the question.

Вивчення асимптотичних властивостей розв'язків сингулярних диференціальних рівнянь та систем належить до числа найбільш актуальних задач якісної теорії диференціальних рівнянь, до яких зводяться математичні моделі різних задач механіки, електротехніки, атомної та ядерної фізики, фізхімії, математичної біології та ін. Перший важливий результат, в якому дана асимптотика розв'язків деяких лінійних диференціальних рівнянь з майже постійними коефіцієнтами, був одержаний Анрі Пуанкаре. Зараз напрямки досліджень даних рівнянь досить різноманітні, але загальної теорії тут ще нема. Тому кожна нова задача та кожна нова модифікація рівнянь потребує власних доказів фундаментальних теорем.

Пропонується розглянути систему диференціальних рівнянь першого порядку з майже постійними коефіцієнтами

$$\begin{cases} y_k' = \sum_{j=1}^{n} (a_{kj} + A_{kj}(x, y_1, \ldots, y_n)) y_j, \\ k = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{1}$$

де $a_{ki} = \mathrm{const} \in \mathbf{R}$;

$A_{kj} \in C^{0,1,\ldots,1}_{x, y_1, \ldots, y_n}(D)$;

$D = ((x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}^n) \subset \mathbf{R}^{n+1}$

та "скорочена" відносно до неї система

$$\begin{cases} y_k' = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j, \\ k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{2}$$

Ставиться задача: встановити достатні умови існування розв'язків системи (1), що при $x \to +\infty$ асимптотично дорівнюють фіксованому розв'язку системи (2).

Позначимо через $\omega = (\omega_j(x))_{j=1}^{n}$ фіксований частинний розв'язок системи (2) на множині $\mathbf{R}$. Перетворенням $y_k = \omega_k + Y_k$, $k = \overline{1, n}$ переводимо систему (1) у систему відносно Y_k

$$\begin{cases} Y_k' = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} Y_j + \sum_{j=1}^{n} A_{kj}(\,x,\, \omega_1 + Y_1,...,\omega_n + Y_n)(\omega_j + Y_j), \\ k = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{3}$$

Теорема 1. Нехай для системи (3) існує така функція Ляпунова $V(Y_1,...,Y_n)$ і така функція $\varphi(x) \in C^1(\mathbf{R}^+)$, $\forall x \in \mathbf{R}^+$: ($\varphi(x) > 0$, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(+\infty) = 0$), $\varphi(x) = o(\omega_j)$, $j = \overline{1,n}$ при $x \to +\infty$, що поверхня

$$V = \delta^2 \varphi^2(x)\,, \tag{4}$$

при достатньо великому $0 < \delta = \text{const}$ і $x \ge x_0 >> 1$ є поверхнею без контакту, тобто функція

$$W = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial Y_k} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} Y_j + \sum_{j=1}^{n} A_{kj}(\,x,\, \omega_1 + Y_1,...,\omega_n + Y_n)(\omega_j + Y_j) \right) - 2\delta^2 \varphi(x)\varphi'(x)$$

зберігає знак. Тоді, якщо $W > 0$, то існує хоча б один нетривіальний розв'язок системи (3), такий що $V(Y_1(x),...,Y_n(x)) < \delta^2\varphi^2(x)$ при $x \ge x_0$. Якщо ж $W < 0$, то система (3) має n-параметричну сім'ю таких розв'язків.

Таким чином, якщо виконані умови теореми 1, то для кожного фіксованого розв'язку системи (2) існує або хоча б один розв'язок або n-параметрична сім'я розв'язків системи (1), зображених у вигляді $y(x) = \omega(x) + \overline{o}(1)$ при $x \to +\infty$.

При доведенні теореми 1 у разі, коли $W > 0$ використовується топологічний принцип Важевського. Якщо ж $W < 0$, то результат, з геометричної точки зору, є очевидним.

Як застосування теореми 1 розглядається випадок, коли система (2) задовольняє також додатковим умовам $\forall k, j = \overline{1,n},\ \ k \ne j:\ a_{kj} = -a_{jk}$. У цьому випадку для системи (3) можемо записати $V = \sum_{k=1}^{n} Y_k^2$. Підберемо функцію $\varphi(x)$ так, щоб для кожного фіксованого $\omega = (\omega_j(x))_{j=1}^n$ виконувалась умова $\varphi(x) = \overline{o}(\omega_j), j = \overline{1,n},$ при $x \to +\infty$. Тоді

$$W = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} Y_k^2 + \sum_{k,j=1}^{n} A_{kj}(\,x,\, \omega + Y)\omega_j Y_k + \sum_{k,j=1}^{n} A_{kj}(\,x,\, \omega + Y)\; Y_j Y_k - \delta^2 \varphi\, \varphi'\,.$$

Якщо позначити $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} a_{kk} Y_k^2}{\delta^2 \varphi^2} - \dfrac{\varphi'}{\varphi} = p(x, Y_1, Y_2,...,Y_n)$, можемо записати

$$W = \delta^2 \varphi^2 p \left(1 + \frac{\sum_{k,j=1}^{n} A_{kj}(\,x,\, \omega + Y)\omega_j}{\delta\varphi\, p} + \frac{\sum_{k,j=1}^{n} A_{kj}(\,x,\, \omega + Y)}{p} \right).$$

На поверхні (4) $Y_k = \underline{O}(\delta\varphi),\ k = \overline{1,n},$ при $x \to +\infty$ вимагатиме у загальному випадку, щоб при достатньо великих $0 < \delta = \text{const}$ і кожному фіксованому $x \ge x_0(\omega,\delta)$ функція $p(x, Y_1,...,Y_n)$ зберігала знак на поверхні (4). Тоді, якщо при $\delta >> 1,\ x \ge x_0 >> 1$

$$\left| \frac{\sum_{k,j=1}^{n} |A_{kj}|\,|\,\omega_j|}{\delta\varphi\, p} \right| \le \frac{1}{4}, \qquad \left| \frac{\sum_{k,j=1}^{n} |A_{kj}|}{p} \right| \le \frac{1}{4}\,, \tag{5}$$

то на поверхні (4) $\mathrm{sgn}(W) = \mathrm{sgn}(p)$ і тому виконані всі умови теореми 1. Таким чином, умови (5) є достатніми умовами, що накладаються на додатки $A_{kj}(x, y_1, ..., y_n)$, при яких можна стверджувати, що існують розв'язки системи (1), які при $x \to +\infty$ асимптотично дорівнюють розв'язку системи (2).

Зауваження 1. Іноді, якщо при $x \to +\infty$ відомі оцінки на додатки $A_{kj}(x, y_1, ..., y_n)$, за допомогою теореми 1 можна знайти також оцінки і для Y_k', а тому і для y_k', $k = \overline{1, n}$, при $x \to +\infty$.

Зауваження 2. Розв'язки "скороченої" системи (2) визначені скрізь на $\mathbf{R}$. Таким чином, скориставшись теоремою 1, неважко вивчити поведінку розв'язків системи (1) на $\mathbf{R}^-$, тобто при $x \to -\infty$. Для цього, наприклад, можна зробити заміну $x = -t (t \to +\infty)$.

Зауваження 3. Нехай, при кожному фіксованому $x \ge x_0(\omega, \delta)$ функція $p(x, Y_1, ..., Y_n) > 0$. Тоді можуть виникати такі випадки:

а) $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} a_{kk} Y_k^2}{\delta^2 \varphi^2} \ge \eta > 0,\ \eta = \mathrm{const} \in \mathbf{R}$, отже $W > 0$;

б) $a_{kk} \le -\mu < 0,\ \ 0 < \mu = \mathrm{const} \in \mathbf{R}$ і $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} a_{kk} Y_k^2}{\delta^2 \varphi^2} \le -\mu$. Отже при $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\varphi'}{\varphi} = 0$ маємо, що $W < 0$.

Якщо ж, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{\varphi'}{\varphi} \right) = q > 0$, то при $q > \mu > 0 \Rightarrow W > 0$, а при $0 < q < \mu \Rightarrow W < 0$. Випадок $q = \mu$ не розглядається.

Приклад. Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку при $x \to +\infty$

$$y'' + \frac{\sin(y'y)}{x^2} y' + \left(9 + \frac{\cos(y'^2 y)}{x^2} \right) y = 0. \tag{6}$$

Це рівняння зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} y' = 3y_1, \\ y_1' = -\dfrac{\sin(y'y)}{x^2} y_1 - 3y - \dfrac{\cos(y'^2 y)}{3x^2} y. \end{cases} \tag{7}$$

Очевидно, що "скорочена" відносно до неї система

$$\begin{cases} y' = 3y_1, \\ y_1' = -3y \end{cases}$$

має розв'язок

$$\begin{cases} \omega = C \sin(3x + \alpha), \\ \omega_1 = C \cos(3x + \alpha), \end{cases}$$

де C, α — довільні параметри.

Перетворенням $\begin{cases} y = \omega + Y, \\ y_1 = \omega_1 + Y_1 \end{cases}$ переводимо систему (7) у систему відносно Y та Y_1

$$\begin{cases} Y' = 3Y_1, \\ Y_1' = -\dfrac{\sin\left(3(\omega_1 + Y_1) \cdot (\omega + Y)\right)}{x^2} (\omega_1 + Y_1) - 3Y - \dfrac{\cos\left(\left(3(\omega_1 + Y_1)\right)^2 \cdot (\omega + Y)\right)}{3x^2} (\omega + Y). \end{cases} \tag{8}$$

Вивчимо поведінку розв'язків системи (8), які перетинають поверхню,

$$Y^2 + Y_1^2 = \delta^2 \frac{1}{x^2}, \tag{9}$$

($0 < \delta = \text{const}$ поки що не визначена). Тоді скалярний добуток $\left(\frac{\overline{N}}{2}, \overline{T}\right) = W$ має вигляд

$$\left(\frac{\overline{N}}{2}, \overline{T}\right) = -\frac{\sin(3(\omega_1 + Y_1)\cdot(\omega + Y))}{x^2}\left(\omega_1 + Y_1\right)Y_1 - \frac{\cos((3(\omega_1 + Y_1))^2\cdot(\omega + Y))}{3x^2}(\omega + Y)Y_1 +$$
$$+\delta^2\frac{1}{x^3} = \delta^2\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x} - \frac{\sin(3(\omega_1 + Y_1)\cdot(\omega + Y))\cdot\omega_1}{\delta x^2}\cdot x - \frac{\sin(3(\omega_1 + Y_1)\cdot(\omega + Y))}{x^2} - \right.$$
$$\left. -\frac{\cos((3(\omega_1 + Y_1))^2\cdot(\omega + Y))\cdot\omega}{3\delta x^2}\cdot x - \frac{\cos((3(\omega_1 + Y_1))^2\cdot(\omega + Y))}{3x^2}\right),$$

де $\overline{N}$ — вектор зовнішньої нормалі до поверхні (9),
$\overline{T}$ — відповідний вектор поля напрямів, обумовлений системою (8).

Далі підберемо δ та x_0 так, щоб скалярний добуток зберігав знак на поверхні (9). Для цього використаємо оцінки при $x \to +\infty$

$$\left|\sin(3(\omega_1 + Y_1)\cdot(\omega + Y))\cdot\omega_1\right| \le |C|; \qquad \left|\sin(3(\omega_1 + Y_1)\cdot(\omega + Y))\right| \le 1;$$
$$\left|\cos((3(\omega_1 + Y_1))^2\cdot(\omega + Y))\cdot\omega\right| \le |C|; \qquad \left|\cos((3(\omega_1 + Y_1))^2\cdot(\omega + Y))\right| \le 1.$$

Тоді

$$\left(\frac{\overline{N}}{2}, \overline{T}\right) \ge \frac{\delta^2}{x^2}\left(\frac{1}{x} - \frac{|C|}{\delta x} - \frac{1}{x^2} - \frac{|C|}{3\delta x} - \frac{1}{3x^2}\right) = \frac{\delta^2}{x^3}\left(1 - \frac{|C|}{\delta} - \frac{1}{x} - \frac{|C|}{3\delta} - \frac{1}{3x}\right) = \frac{\delta^2}{x^3}\left(1 - \frac{4}{3x} - \frac{4|C|}{3\delta}\right).$$

Таким чином, для того, щоб $\left(\frac{\overline{N}}{2}, \overline{T}\right)$ зберігав знак, достатньо виконання таких умов

$$\left(x > x_0 = \frac{16}{3},\ \delta > \frac{16|C|}{3}\right) \Rightarrow \left(\frac{4}{3x} < \frac{1}{4},\ \frac{4|C|}{3\delta} < \frac{1}{4}\right). \tag{10}$$

Отже, на основі топологічного принципу Важевського можна стверджувати, що при виконанні умов (10) існує хоча б один розв'язок системи (8), який задовольняє умові

$$|Y_k(x)| < \frac{16\,|C|}{3}\cdot\frac{1}{x},\quad k = \overline{0,1}.$$

Тоді рівняння (6) має двопараметричну сім'ю розв'язків, які зображені при $x \to +\infty$ у вигляді

$$y(x) = C\sin\left(3x + \alpha\right) + \underline{O}\left(\frac{16\,|C|}{3x}\right).$$

Крім того, при $x \to +\infty$ можемо записати

$$y'(x) = 3C\cos(3x + \alpha) + \underline{O}\left(\frac{16\,|C|}{x}\right),$$
$$y''(x) = -9C\sin(3x + \alpha) + \underline{O}\left(\frac{48\,|C|}{x}\right).$$

Розглянемо далі систему диференціальних рівнянь першого порядку спеціального вигляду з майже постійними коефіцієнтами, при розв'язанні якої використаємо метод, відмінний від метода, запропонованого в попередній теоремі 1,

$$\begin{cases} y_k' = \sum_{j=1}^{k} (a_{kj} + A_{kj}(x, y_1, \ldots, y_n)) y_j, \\ k = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{11}$$

де $a_{ki} = \text{const} \in \mathbf{R}$;

$A_{kj} \in C^{0,1,\ldots,1}_{x, y_1, \ldots, y_n}(D)$;

$D = ((x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}^n) \subset \mathbf{R}^{n+1}$

та "скорочену" відносно до неї систему

$$\begin{cases} y_k' = \sum_{j=1}^{k} a_{kj} y_j, \\ k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{12}$$

Потрібно, як і раніше, встановити достатні умови існування розв'язків системи (11), які при $x \to +\infty$ асимптотично дорівнюють фіксованому розв'язку $\omega = (\omega_j(x))_{j=1}^{n}$ системи (12).

Перетворенням $y_k = \omega_k + Y_k$, $k = \overline{1, n}$, переводимо систему (11) у систему

$$\begin{cases} Y_k' = \sum_{j=1}^{k} a_{kj} Y_j + \sum_{j=1}^{k} A_{kj}(\, x,\, \omega_1 + Y_1, \ldots, \omega_n + Y_n)(\omega_j + Y_j), \\ k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{13}$$

Теорема 2. Нехай для системи (13) існують функції $\varphi_k(x) \in C^1(\mathbf{R}^+)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}^+$: $\varphi_k(x) > 0$, $\varphi_k'(x) < 0$, $\varphi_k(+\infty) = 0$, $\varphi_k = \overline{o}(\omega_k)$, $x \to +\infty$, $k = \overline{1, n}$. Крім того, нехай вираз $p_k(x) = a_{kk} - \dfrac{\varphi_k'}{\varphi_k}$ зберігає знак при $x \ge x_0 >> 1$ та на межі $\partial\Omega$ області

$$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^+,\ |Y_k| \le \delta_k \varphi_k,\ k = \overline{1, n}\}, \qquad 0 < \delta_k = \text{const},$$

за рахунок $\delta_1 << \ldots << \delta_n$ $(\delta_n >> 1)$ і $x \ge x_0 >> 1$ виконуються умови

$$\left| \frac{A_{kj}(x, \omega_1 + Y_1, \ldots, \omega_n + Y_n)\varphi_j(x)}{\varphi_k(x) p_k(x)} \right| \le \xi_{kj} \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \frac{\delta_j}{\delta_k} \xi_{kj} < \frac{1}{4},$$

$$\left| \frac{A_{kj}(x, \omega_1 + Y_1, .., \omega_n + Y_n)\omega_j}{\varphi_k(x) p_k(x)} \right| \le \mu_{kj} \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \frac{\mu_{kj}}{\delta_k} < \frac{1}{4}, \tag{14}$$

$$\left| \frac{a_{kj}\varphi_j(x)}{\varphi_k(x) p_k(x)} \right| \le \lambda_{kj} \Rightarrow \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\delta_j}{\delta_k} \lambda_{kj} < \frac{1}{4}.$$

Тоді, якщо серед фіксованих $p_k(x)$ є r-від'ємних і (n–r)-додатних, то $\partial\Omega$ складається з r смуг строгого входу і (n–r) смуг строгого виходу відповідно.

Звідси, за топологічним принципом Важевського, існує r-параметрична сім'я інтегральних кривих, яка при $x \ge x_0 >> 1$ належить області Ω.

Таким чином, якщо виконані умови теореми 2, то для кожного фіксованого розв'язку системи (12) існує r-параметрична сім'я розв'язків системи (11), зображених у вигляді $y(x) = \omega(x)(1 + \overline{o}(1))$ при $x \to +\infty$.

Аналогічним методом можна дослідити рівняння третього порядку з майже постійними коефіцієнтами. Наприклад, розглянемо диференціальне рівняння третього порядку

$$y''' + \frac{1}{x^2 + (y'')^2}\, y'' + (3 + e^{-x^2} \operatorname{arctg} y) y' + \left(\sin \frac{1}{x + y^2} \right)^2 y = 0 \tag{15}$$

при умові, що $x \to +\infty$.

“Скорочене”, відносно до (15), рівняння

$$y''' + 3y' = 0 \tag{16}$$

має розв'язок $\omega = C_1 + C_2 \sin(\sqrt{3}x + C_3), \quad \forall C_{1,2,3} \in \mathbf{R}$. Неважко записати систему рівнянь першого порядку, рівносильну вихідному рівнянню (15)

$$\begin{cases} y' = y_2 + y_3, \\ y_2' = -y + y_3, \\ y_3' = -y - y_2 + \dfrac{2y + y_2 - y_3}{x^2 + (2y + y_2 - y_3)^2} - (y_2 + y_3) e^{-x^2} \operatorname{arctg} y - y \sin^2 \dfrac{1}{x + y^2}. \end{cases} \tag{17}$$

Очевидно, що

$$\begin{cases} \omega = C_1 + C_2 \sin(\sqrt{3}x + C_3), \\ \omega_2 = -C_1 + \dfrac{C_2}{2} \sin(\sqrt{3}x + C_3) + \dfrac{\sqrt{3}}{2} C_2 \cos(\sqrt{3}x + C_3), \\ \omega_3 = C_1 - \dfrac{C_2}{2} \sin(\sqrt{3}x + C_3) + \dfrac{\sqrt{3}}{2} C_2 \cos(\sqrt{3}x + C_3) \end{cases}$$

є розв’язком відповідної “скороченої” системи

$$\begin{cases} y' = y_2 + y_3, \\ y_2' = -y + y_3, \\ y_3' = -y - y_2. \end{cases}$$

Перетворенням $\begin{cases} y = \omega + Y, \\ y_2 = \omega_2 + Y_2, \\ y_3 = \omega_3 + Y_3 \end{cases}$ переводимо систему (17) у систему відносно Y, Y_2 та Y_3

$$\begin{cases} Y' = Y_2 + Y_3, \\ Y_2' = -Y + Y_3, \\ Y_3' = -Y - Y_2 + G(x, \omega, \omega_2, \omega_3, Y, Y_2, Y_3), \end{cases} \tag{18}$$

де $G = \dfrac{(2\omega + \omega_2 - \omega_3) + (2Y + Y_2 - Y_3)}{x^2 + [(2\omega + \omega_2 - \omega_3) + (2Y + Y_2 - Y_3)]^2} - [(\omega_2 + \omega_3) + (Y_2 + Y_3)]\, e^{-x^2} \operatorname{arctg}(\omega + Y) - (\omega + Y) \sin^2 \dfrac{1}{x + (\omega + Y)^2}$.

Як і раніше, вивчаємо поведінку розв’язків системи (18), які перетинають поверхню

$$Y^2 + Y_2^2 + Y_3^2 = \frac{\delta^2}{x^{2\nu}}, \quad 0 < \nu \le 1, \tag{19}$$

($0 < \delta = \mathrm{const}$ поки що не визначена). Тоді скалярний добуток $\left(\dfrac{\overline{N}}{2}, \overline{T} \right)$ має вигляд

$$\left(\frac{\overline{N}}{2},\overline{T}\right)=G(x,\omega,\omega_2,\omega_3,Y,Y_2,Y_3)\cdot Y_3+\frac{\nu\delta^2}{x^{2\nu+1}}=\frac{\delta^2}{x^{2\nu+1}}\cdot\left(\nu+\frac{G\cdot Y_3\cdot x^{2\nu+1}}{\delta^2}\right).$$

Отже, при $x\to+\infty$ можемо записати

$$\left(\frac{\overline{N}}{2},\overline{T}\right)=\frac{\delta^2}{x^{2\nu+1}}\cdot\left(\nu+\underline{O}\left(\frac{x^{\nu-1}}{\delta}\right)+\underline{O}\left(\frac{e^{-x^2}x^{\nu+1}}{\delta}\right)+\underline{O}\left(\frac{x^{\nu-1}}{\delta}\right)\right).$$

Далі так підберемо $\delta(C_1,C_2)>>1$ та $x_0(C_1,C_2)>>1$, щоб $\operatorname{sgn}\left(\frac{\overline{N}}{2},\overline{T}\right)=\operatorname{sgn}(\nu)=+1,\quad\forall x\ge x_0$. Тобто всі точки поверхні (19) при $x\to+\infty$ є точками строгого виходу і, згідно з топологічним принципом Важевського існує хоча б один розв'язок системи (18) при $\forall x\ge x_0>>1$ який задовольняє умовам $Y=\underline{O}\left(\frac{\delta}{x}\right),\ Y_2=\underline{O}\left(\frac{\delta}{x}\right),\ Y_3=\underline{O}\left(\frac{\delta}{x}\right)$ при $x\to+\infty$. Отже система рівнянь (17) має хоча б один розв'язок, який при $x\to+\infty$ має вигляд

$$y(x)=\omega(x)+\underline{O}\left(\frac{\delta}{x}\right),\quad y_2(x)=\omega_2(x)+\underline{O}\left(\frac{\delta}{x}\right),\quad y_3(x)=\omega_3(x)+\underline{O}\left(\frac{\delta}{x}\right).$$

Таким чином, остаточно можемо зробити висновок: для кожного фіксованого розв'язку $\omega=C_1+C_2\sin(\sqrt{3}x+C_3),\quad\forall C_{1,2,3}\in\mathbf{R}$ рівняння (16) існує хоча б один розв'язок рівняння (15), який задовольняє умовам $y(x)=\omega(x)+\underline{O}\left(\frac{\delta}{x}\right)$ при $x\to+\infty$.

Неважко також дати оцінки похідним знайденого розв'язку $y(x,C_1,C_2,C_3)\in C^3[x_0(C_1,C_2),+\infty)$ при $x\to+\infty$:

$$\begin{cases}y'(x)=\omega_2(x)+\omega_3(x)+\underline{O}\left(\frac{\delta}{x}\right)\\ y''(x)=-2\omega(x)-\omega_2(x)+\omega_3(x)+\underline{O}\left(\frac{\delta}{x}\right)\\ y'''(x)=-3(\omega_2(x)+\omega_3(x))+\underline{O}\left(\frac{\delta}{x}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y'(x)=\sqrt{3}C_2\cos(\sqrt{3}x+C_3)+\underline{O}\left(\frac{\delta}{x}\right),\\ y''(x)=-3C_2\sin(\sqrt{3}x+C_3)+\underline{O}\left(\frac{\delta}{x}\right),\\ y'''(x)=-3\sqrt{3}C_2\cos(\sqrt{3}x+C_3)+\underline{O}\left(\frac{\delta}{x}\right).\end{cases}\quad(20)$$

Зауваження 4. З оцінок (20) випливає, що довільному набору параметрів $\{C_1,C_2\}$ з області припустимих значень можна поставити у відповідність $x_0(C_1,C_2)>>1$. Якщо ж $\{C_1,C_2\}$ обмежено, то x_0 у цьому випадку буде спільним для всіх припустимих значень параметрів.

Надійшла до редакції 15 січня 2007 р.