

УДК 681.513.675

С.А. Положаенко, д-р техн. наук, доц.
Одес. нац. политехн. ун-т

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ АНОМАЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

С.А. Положаенко. Математичне моделювання процесів фільтрації аномальних рідин. Розглянуто особливості плинину у порових середовищах рідин, які не підпорядковуються лінійному закону фільтрації — закону Дарсі. Для цих рідин одержані математичні моделі та запропоновані підходи до їх чисельної реалізації.

S.A. Polozhaenko. Mathematical modelling of anomalous liquids filtration processes. The peculiarities of liquids flowing within sponge substances and falling off the linear law of filtration after Darsi are considered. Such liquids have been mathematically modelled and the approaches to their numerical realization are offered.

Одним из важных разделов прикладной физики является теория фильтрации жидкости, которая занимается изучением явлений течения жидкостей через пористые среды. Основное содержание теоретических положений и прикладных аспектов исследований при этом неизменно связано с техническими приложениями и, в первую очередь, с задачами гидротехники и разработки нефтяных и газовых месторождений. Благодаря такой тесной взаимосвязи накапливаются факты, которые заставляют пересматривать и обобщать установившиеся положения теории. Важно [1] и обратное — детальное исследование новых гидродинамических моделей позволяет правильно оценивать роль тех или иных явлений при решении технических задач, находить пути использования особенностей физической системы “жидкость — пористая среда” или бороться с вредными проявлениями этих особенностей.

Теория фильтрации аномальной жидкости в этом отношении не является исключением. Первоначально интерес к ней возник с появлением отдельных фактов, указывающих на нарушение линейного закона фильтрации — закона Дарси — в области малых скоростей фильтрации [2, 3]. Дальнейшие исследования показали, что это не редкое исключение, а обычное явление для определенных классов систем “жидкость — пористая среда” [1]. К типичным примерам таких систем, в частности, пластовых, можно отнести движение воды в глинах и глинизированных породах; движение нефти, содержащей значительное количество асфальто-смолистых веществ, а также парафинистой нефти при пониженных температурах. Особенность данных жидкостей состоит в том, что они, либо сами по себе обладают псевдопластическим реологическим поведением, либо приобретают его при взаимодействии с пористой средой. Качественное проявление подобных геологических аномалий кардинально изменяет картину движения жидкости в пористой среде и картину вытеснения одной жидкости другой (например, нефти водой). С технической точки зрения это особенно важно для нефтяных месторождений с водонапорным режимом разработки, где большая часть пласта занята зоной малых градиентов давления.

Математические модели (ММ) течения аномальных жидкостей, учитывающие особенности протекания физических процессов в достаточной степени не разработаны. Предлагаются модели нелинейно-вязких жидкостей, характеризующихся преимущественной направленностью фильтрации в пластовой системе.

Под аномальными (или неньютоновскими) понимаются жидкости, не подчиняющиеся модели вязкой жидкости [1], для которой, в свою очередь, имеет место линейная изотропная связь между тензорами σ_{ij} напряжений и скоростной деформацией ε_{ij} [3], в соответствии с выражением

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad (1)$$

где P — изотропное давление, Па;
 μ — вязкость жидкости, Па с;

δ_{ij} — единичный тензор,

i, j — орты плоской системы координат,

или, в упрощенной трактовке, применительно к простому сдвигу в слоях пористой среды

$$\tau = \mu \dot{\gamma}, \quad (2)$$

где τ — касательное напряжение, Н/м;

$\dot{\gamma}$ — скорость сдвига, м/с.

Для вязкой (ньютоновской) жидкости вида (1) или (2) справедливы три допущения:

— мгновенное значение отклонений тензора напряжений определяется мгновенным значением отклонений тензора скоростей деформации;

— эти два тензора соосны;

— связь между этими двумя тензорами всегда линейная.

Для аномальных жидкостей нарушается, по крайней мере, одно из этих допущений. Наиболее простой случай аномальных жидкостей — нелинейно-вязкие жидкости, для которых нарушается только допущение 3, т.е. отклонения тензора напряжений однозначно определяются отклонениями тензора скоростей деформаций, тензоры соосны, но зависимость между ними — нелинейная.

На практике интерес представляют, прежде всего, нелинейно-вязкие жидкости, способные образовывать твердообразные структуры, разрушающиеся при увеличении интенсивности деформаций, что типично, например, для нефтяного пласта при водонапорном режиме разработки. Такие жидкости характеризуются псевдопластическим поведением: кривая $\dot{\gamma} = \varphi(\tau)$ для них выпукла к оси τ при $\dot{\gamma} \geq 0$. Псевдопластическое поведение хорошо описывается в рамках модели Бингама-Шведова [3]

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\mu}(\tau - \tau_0) \text{ при } \tau > \tau_0, \quad \dot{\gamma} = 0 \text{ при } \tau \leq \tau_0, \quad (3)$$

где τ_0 — предельное напряжение сдвига в слоях поровой среды.

Второе равенство в (3) указывает либо на пренебрежение соответствующими скоростями деформаций в фильтрующейся жидкости, вызванными изотропным давлением, либо на полное отсутствие течения фильтрующейся жидкости.

Более сложную качественную окраску имеет нарушение первого из перечисленных допущений. Возможен случай, когда напряжения в жидкости однозначно определяются совокупностью зависимостей от текущего значения тензора скоростей деформаций и от всей предыстории деформирования данного жидкого элемента.

Аномальный характер течения жидкости в пористой среде вносит также качественные изменения и в закон фильтрации. Линейный закон фильтрации — закон Дарси [1] — устанавливает пропорциональность и коллинеарность векторов скорости фильтрации W и градиента давления P

$$W = -\frac{k}{\mu} \text{grad} P, \quad (4)$$

где k — проницаемость пористой среды, м².

Выражение (4) справедливо, если массовые силы, определяемые массой фильтрующейся жидкости, не учитываются. Иными словами, закон Дарси введен на основе предположения о существовании в пористом пространстве пористой среды стокового, безынерционного движения вязкой жидкости. Поэтому закон Дарси применим для достаточно малых скоростей фильтрации. Нарушение закона Дарси становится заметным, если число Рейнольдса фильтрации приближается к величине, определяемой выражением

$$\text{Re} = \frac{\varpi d P}{\mu}, \quad \varpi = |W|,$$

где d — размер зерна или поры скелета пористой среды, выраженный в относительных единицах.

Если размер зерна (поры) при этом приближается к единице в относительных измерениях, то учет инерционных эффектов приводит к двучленному закону фильтрации

$$\text{grad} P = \frac{k}{\mu} W (1 + \rho \omega d), \quad (5)$$

где ρ — плотность фильтрующейся жидкости, кг/м³,

и, как следствие, к нарушению линейности закона (4).

Иной характер носят отклонения от закона Дарси при малых скоростях фильтрации. Эти отклонения могут порождаться либо из-за несоответствия реологического поведения жидкости в модели вязкого (ньютоновского) тела; либо вследствие физического взаимодействия между жидкостью и скелетом пористой среды, приводящим к изменению свойств приповерхностных слоев жидкости и возникновению дополнительных сил сопротивления движению последней. Зачастую эти оба эффекта переплетаются. Например, это характерно для нефти, представляющей собой смесь углеводородов и фракций, содержащих тяжелые компоненты — парафин, смолисто-асфальтные вещества, которые способны образовывать твердообразные структуры. В результате эта нефть характеризуется псевдопластическим или вязко-пластическим реологическим поведением, главным образом при низких температурах. Можно показать основные особенности, связанные с таким поведением фильтрующейся жидкости, приняв, в качестве основной, модель вязко-пластического тела Бингама-Шведова (3). При этом для вязко-пластической жидкости, движущейся в пористой среде с определенным размером зерен d , в общем случае с учетом размерностей величин и изотропии физического процесса справедлива следующая ММ

$$\text{grad} P = -\frac{\mu W}{m d^2} f(\Omega), \quad \Omega = \frac{\tau - \tau_0}{\mu \omega}, \quad (6)$$

где m — пористость среды, %.

С учетом (6) возможны два случая записи закона фильтрации аномальной жидкости:

— при больших скоростях фильтрации пластическое сопротивление ее движению, очевидно, должно уменьшаться, причем в пределе, когда $W \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow \infty$, $\Omega \rightarrow 0$, соотношение (6) переходит в линейный закон Дарси вида (4)

$$W = -\frac{k}{\mu} \text{grad} P, \quad k = \frac{m d^2}{f(0)};$$

— при малых скоростях фильтрации — $W \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$, $\Omega \rightarrow \infty$ — вязкое сопротивление становится пренебрежимо малым, тогда записывая функцию $f(\Omega)$ как $f(\infty) = -\frac{\tau_0}{\mu \omega} \left(1 + \frac{\tau}{\tau_0}\right)$,

можно прийти к записи закона фильтрации аномальной жидкости в трактовке закона с предельным градиентом [3]

$$\text{grad} P = -\frac{\mu W}{k} (1 - g), \quad g = \frac{\tau}{\tau_0}. \quad (7)$$

Если $\text{grad} P$ меньше предельного градиента $G = \frac{\mu W g}{k}$, то движение жидкости отсутствует, т.е. соотношение (7) следует дополнить условиями

$$\omega = 0, \quad |\text{grad} P| \leq G. \quad (8)$$

С практической точки зрения в теории фильтрации очень важное место занимает более сложный случай — движение неоднородной жидкости и процессы вытеснения, т.е. замены в скелете пористого пространства одной жидкости другой, что наиболее типично при разработке

нефтяных и газовых месторождений, а также в гидромеханике грунтовых вод и известно как задача многофазной фильтрации, чаще всего двухфазной, в которой под фазами принято называть фильтрующиеся жидкости [1, 3]. Для аномальной жидкости ММ двухфазной фильтрации также принимает вид закона с предельным градиентом

$$W_l = -\frac{k\lambda_l(S)}{\mu_l} \text{grad}P_l, \quad l=1, 2; \quad (9)$$

$$P_1 - P_2 = P_c(S); \quad (10)$$

$$\text{div}W_j - (-1)^j m \frac{\partial S}{\partial t} = 0; \quad (11)$$

$$\varpi_l = -\frac{k\lambda_l(S)}{\mu_l} \left[\text{grad}P_l - \frac{G_l}{|\text{grad}P_l|} \text{grad}P_l \right], \quad |\text{grad}P_l| > G_l, \quad l=1, 2$$

$$\varpi_l = 0, \quad |\text{grad}P_l| \leq G_l, \quad l=1, 2, \quad (12)$$

где P_1 и P_2 — давления, под которыми находятся фильтрующиеся жидкости в пластовой системе, Па;

$P_c(S)$ — капиллярное давление, Па;

W_1 и W_2 — скорости фильтрации жидкостей в двухфазном потоке, м/с;

$\lambda_l(S)$ — проницаемость соответствующей фазы, м/с;

S — насыщенность пористого пространства одной из фаз, например, той, что более смачивает материал скелета пласта, %.

Таким образом, если происходит вытеснение вязко-пластической жидкости вязкой, например, нефти водой, движение вытесняющей фазы начинается лишь по достижении насыщенностью некоторого значения S_0 , которое, при достаточно низких скоростях вытеснения, может быть значительно выше значения S_* , при котором $\lambda_l(S) = 0$, т.е. становится возможным условие $\varpi \neq 0$.

Следовательно, вне зависимости от физической природы, порождающей в пористой среде фильтрационные аномалии, последние приводят к нелинейным законам фильтрации и сопровождаются, зачастую, неравновесными процессами, обусловленными перестройкой структуры системы “жидкость — пористая среда”. Иными словами, процесс фильтрации в своем развитии претерпевает разрывы, характеризуется интервалами с выраженным преимущественным направлением или отсутствием эволюционного развития, а также формализуется в виде существенно нелинейных законов. Причины такого реологического поведения следует искать в резких изменениях условий взаимодействия пород, образующих скелет пористой среды, и фильтрующейся жидкости.

Анализ процессов реологии аномальных жидкостей позволяет сделать вывод об их принадлежности к более широкому классу физических процессов — односторонним физическим процессам [4], для которых характерно скачкообразное изменение свойств при достижении пространством состояний некоторого порога. В связи с этим конструктивной представляется формализация ММ гидродинамики аномальных жидкостей на основе вариационных неравенств, которые обеспечивают учет одностороннего (необратимого) характера течения рассматриваемого процесса. Решение ряда тестовых задач показало эффективность предложенного подхода к вычислительной реализации ММ аномальных жидкостей, а развитие этого подхода позволит получить качественно новые результаты в решении прикладных задач фильтрации.

Выполненное моделирование линейно-вязких жидкостей в соответствии с предложенными ММ показало повышение точности определения пластового давления по сравнению с использованием для расчетов моделей ньютоновской жидкости на 3...5 %. Наибольший эффект на-

блюдался в граничных точках пространственной области, где существенным образом сказываются нелинейные свойства фильтрующейся жидкости. Сравнение полученных результатов моделирования с реальными измерениями позволяет сделать вывод о высокой степени адекватности разработанных ММ.

Литература

1. Бернадинер М.Г., Ентов В.М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей.— М.: Наука, 1975.— 199с.
2. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика.— М.: Гостоптехиздат, 1963. — 378с.
3. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. — М.: Мир, 1964. — 375с.
4. Дюво Г., Лионс Ж.Л. Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980. — 383с.

Посупила в редакцию 27 апреля 2007 г.