

УДК 519.6:624.073

Н.Г. Сурьянинов, д-р техн. наук, проф.,  
И.В. Павленко, магістр,  
Одес. нац. политехн. ун-т

## ПРИЛОЖЕНИЕ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РАСЧЕТУ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

**Введение.** В силу определенных проблем математического характера получить аналитическое решение дифференциального уравнения изгиба ортотропной пластины удастся не всегда. Существенную роль в этом играют условия закрепления краев пластины и локальные нагрузки. Широко применяются численные методы анализа, но здесь, как известно, нет универсального подхода. Каждый численный метод обусловлен необходимостью решения определенного круга задач и, имея те или иные достоинства, не лишен недостатков, часто принципиального характера, которые обуславливают границы его применения.

**Анализ последних исследований и публикаций.** На этом фоне является эффективным использование численно-аналитического метода граничных элементов (ЧА МГЭ) [1, 2]. Этот метод позволяет получить фундаментальную систему решений дифференциального уравнения изгиба изотропных пластин без каких-либо ограничений на характер нагрузки и условия закрепления [1, 2].

**Целью работы** является распространение численно-аналитического метода граничных элементов на расчет ортотропных пластин.

**Изложение основного материала.** Дифференциальное уравнение изгиба ортотропной пластины имеет вид

$$D_1 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial y^4} = q(x, y), \quad (1)$$

где жесткости определяются формулами

$$D_1 = \frac{E_x h^3}{12(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})};$$

$$D_2 = \frac{E_y h^3}{12(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})};$$

$$D_3 = D_1 \mu_{xy} + 2D_k = D_2 \mu_{yx} + 2D_k;$$

$$D_k = \frac{Gh^3}{12};$$

$E_x, E_y$  — модули упругости в направлениях осей;

$G$  — модуль сдвига;

$h$  — толщина пластины;

$\mu_{xy}, \mu_{yx}$  — коэффициенты Пуассона.

Основное разрешающее уравнение (1) имеет четвертый порядок и является дифференциальным уравнением в частных производных. Функция, являющаяся решением этого уравнения, зависит от двух переменных, т.е. имеет место двумерная задача. В то же время алгоритм ЧА

DOI: 10.15276/опр.1.43.2014.04

© Н.Г. Сурьянинов, И.В. Павленко, 2014

МГЭ предполагает решение одномерной задачи. Снижение мерности задачи достигается применением вариационного метода Канторовича-Власова.

Разложим прогиб  $W(x, y)$  в функциональный ряд

$$W(x, y) = W_1(y)X_1(x) + W_2(y)X_2(x) + \dots + W_n(y)X_n(x). \quad (2)$$

Безразмерную систему функций  $X_i(x)$  необходимо выбрать такой, чтобы она максимально точно описывала форму изогнутой поверхности пластины в направлении оси  $OX$ . Очевидно, этому требованию удовлетворяют кривые прогиба балки, имеющей такие же условия опирания, как и пластина в направлении оси  $OX$ . Для выбора функции поперечного распределения прогибов  $X(x)$  существуют два способа — статический и динамический [1].

При использовании статического способа прогиб балки определяется статической нагрузкой (рис. 1). Эта нагрузка должна быть такой, чтобы последовательно чередовались симметричные и кососимметричные формы кривой прогиба. Функции  $X_i(x)$  представляются в виде степенных полиномов, которые легко дифференцировать, интегрировать и вычислять без применения сложных программ. При использовании динамического способа прогиба балки представляются формами ее собственных колебаний (рис. 2). Если в статическом способе необходимо строить функции  $X_i(x)$  в зависимости от нагрузки и реакций балки, то в динамическом способе достаточно менять только значения собственных частот, что весьма удобно. Функции  $X_1(x)$  (индекс 1 у этих функций в дальнейшем опускается) для различных условий опирания представлены в табл. 1.

Будем удерживать в (2) один член ряда, что, как показано в ряде работ (например, [2]), оказывается вполне достаточным для получения приемлемой точности результата, т.е.

$$W(x, y) = W(y)X(x). \quad (3)$$

После постановки (3) в (1)

$$D_1 X^{1V} W + 2D_3 X'' W'' + D_2 X W^{1V} = q. \quad (4)$$

Умножим обе части (4) на  $X$  и проинтегрируем в пределах  $[0; l_1]$ , где  $l_1$  — размер пластины в направлении оси  $x$ ,

$$D_1 W \int_0^{l_1} X^{1V} X dx + 2D_3 W'' \int_0^{l_1} X'' X dx + D_2 W^{1V} \int_0^{l_1} X^2 dx = \int_0^{l_1} q(x, y) X dx.$$

Пусть

$$D_2 \int_0^{l_1} X^2 dx = A;$$

$$D_3 \int_0^{l_1} X'' X dx = B;$$

$$D_1 \int_0^{l_1} X^{1V} X dx = C,$$

тогда

$$W^{1V} A + 2W'' B + W C = q(y),$$

где  $q(y) = \int_0^{l_1} q(x, y) X dx$ .

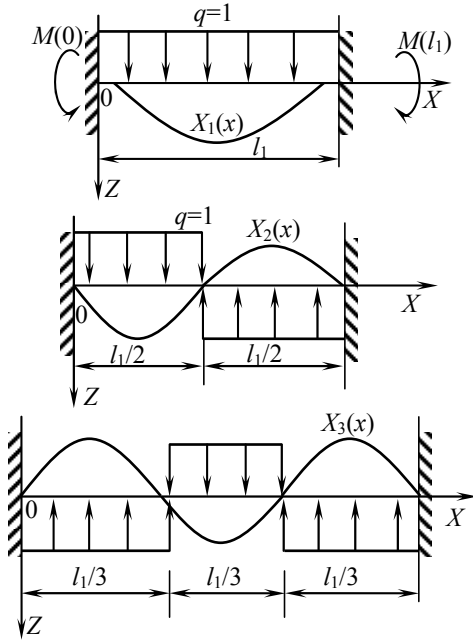


Рис. 1. Функции прогибов (статика)

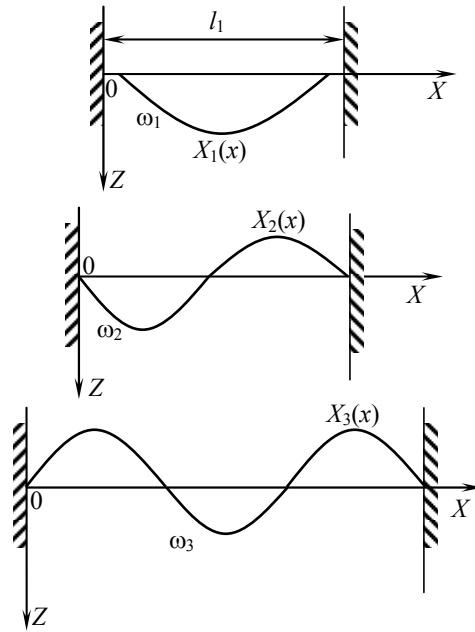


Рис. 2. Функции прогибов (динамика)

Таблица 1

Аналитическое выражение функции  $X(x)$

Схема балки	Форма собственных колебаний
	$X(x) = \sin \frac{\omega x}{l_1} - \text{sh} \frac{\omega x}{l_1} - \alpha_* \left[ \cos \frac{\omega x}{l_1} - \text{ch} \frac{\omega x}{l_1} \right]; \alpha_* = \frac{\sin \omega - \text{sh} \omega}{\cos \omega - \text{ch} \omega}$
	$X(x) = \sin \frac{\omega x}{l_1} - \text{sh} - l_1 \omega x - \alpha_* \left[ \cos \frac{\omega x}{l_1} - \text{ch} \frac{\omega x}{l_1} \right]; \alpha_* = \frac{\sin \omega + \text{sh} \omega}{\cos \omega + \text{ch} \omega}$
	$X(x) = \sin \frac{\omega x}{l_1} - \text{sh} \frac{\omega x}{l_1} - \alpha_* \left[ \cos \frac{\omega x}{l_1} - \text{ch} \frac{\omega x}{l_1} \right]; \alpha_* = \frac{\sin \omega + \text{sh} \omega}{\cos \omega + \text{ch} \omega}$
	$X(x) = \sin \frac{\omega x}{l_1}$
	$X(x) = \sin \frac{\omega x}{l_1} + \alpha_* \text{sh} \frac{\omega x}{l_1}; \alpha_* = \frac{\sin \omega}{\text{sh} \omega}$
	$X(x) = \sin \frac{\omega x}{l_1} + \text{sh} \frac{\omega x}{l_1} - \alpha_* \left[ \cos \frac{\omega x}{l_1} + \text{ch} \frac{\omega x}{l_1} \right]; \alpha_* = \frac{\sin \omega - \text{sh} \omega}{\cos \omega - \text{ch} \omega}$

Коэффициенты  $A, B, C$  можно вычислить в каком-либо математическом пакете, например, в MATLAB.

Обозначая  $B/A = -r^2; C/A = s^4$ , получим

$$W^{IV} - 2r^2 W'' + s^4 W = \frac{1}{A} q(y). \tag{5}$$

Для реализации алгоритма численно-аналитического метода граничных элементов [1, 2] необходимо получить аналитические выражения фундаментальных ортонормированных функций, функции Грина и компонентов вектора внешней нагрузки.

Пластина рассматривается как обобщенный одномерный модуль [1], поэтому вектор ее состояния будет таким же, как и при изгибе балки:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} W(y) \\ \theta_y(y) \\ M_y(y) \\ Q_y(y) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $W, \theta_y, M_y, Q_y$  — прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила, соответственно.

Индекс “y” в дальнейшем опускается.

Решение уравнения (7) зависит от корней соответствующего ему характеристического уравнения [1]

$$K_{1-4} = \pm \sqrt{r^2 \pm \sqrt{r^4 - s^4}}. \quad (7)$$

Так как вектор состояния (6) содержит четыре компонента, а характеристическое уравнение имеет четыре корня, то для полного решения задачи об изгибе ортотропной пластины необходимо получить аналитические выражения 64-х фундаментальных функций. Вид этих функций определяется соотношением между  $r$  и  $s$ , которое зависит от граничных условий на продольных (вдоль оси  $OY$ ) краях пластины.

Первый вариант корней характеристического уравнения, когда  $|s| > |r|$ , соответствует жесткому защемлению продольных, т.е. параллельных оси  $OY$  на рис. 3, краев пластины.

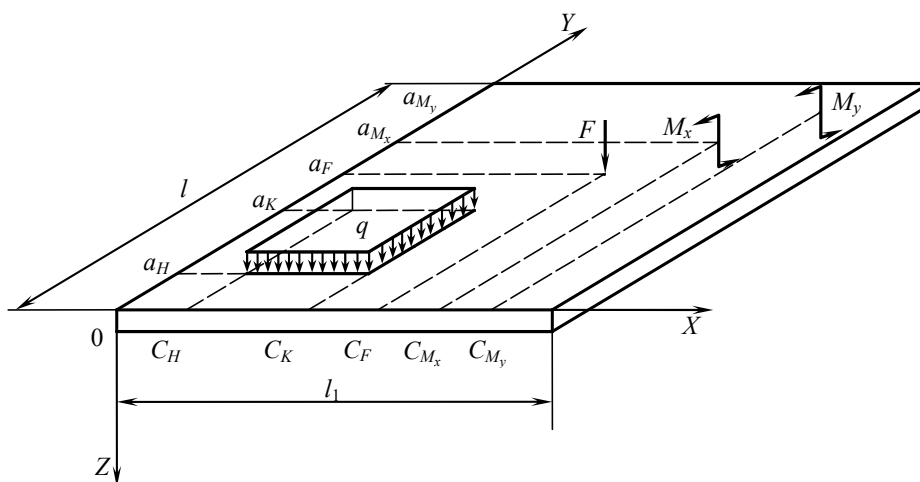


Рис. 3. Нагрузки на пластину

Корни характеристического уравнения  $K_{1-4} = \pm \sqrt{r^2 \pm \sqrt{r^4 - s^4}}$  являются комплексными:  $K_{1-4} = \pm \alpha \pm i\beta$ ;  $\alpha = \sqrt{(s^2 + r^2)/2}$ ;  $\beta = \sqrt{(s^2 - r^2)/2}$ .

Прогиб записывается в виде

$$W(y) = C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2 + C_3 \Phi_3 + C_4 \Phi_4, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \operatorname{ch} \alpha y \sin \beta y; \\ \Phi_2 &= \operatorname{ch} \alpha y \cos \beta y; \\ \Phi_3 &= \operatorname{sh} \alpha y \cos \beta y; \\ \Phi_4 &= \operatorname{sh} \alpha y \sin \beta y.\end{aligned}\tag{9}$$

**Результаты.** Полученные в работе фундаментальные ортонормированные функции имеют вид

$$\begin{aligned}A_{11} &= \Phi_2 + \frac{A(\beta^2 - 3\alpha^2) - R}{2\alpha\beta A} \Phi_4; \quad A_{12} = \frac{\alpha[(3\beta^2 - \alpha^2)A - B]\Phi_1 + \beta[(3\alpha^2 - \beta^2)A + B]\Phi_3}{2\alpha\beta A(\alpha^2 + \beta^2)}; \\ A_{13} &= -\frac{\Phi_4}{2\alpha\beta A}; \quad A_{14} = \frac{\beta\Phi_3 - \alpha\Phi_1}{2\alpha\beta A(\alpha^2 + \beta^2)}; \quad A_{21} = \frac{\beta[A(\beta^2 - \alpha^2) - R]\Phi_3 - \alpha[A(\beta^2 + 3\alpha^2) + R]\Phi_1}{2\alpha\beta A}; \\ A_{22} &= \Phi_2 - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)A + B}{2\alpha\beta A} \Phi_4; \quad A_{23} = -\frac{\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_3}{2\alpha\beta A}; \quad A_{24} = -\frac{\Phi_4}{2\alpha\beta A}; \\ A_{31} &= 2\alpha^2 A \Phi_2 + \frac{A^2(3\alpha^4 + \beta^4) + 2AR(2\alpha^2 - \beta^2) + R^2}{2\alpha\beta A} \Phi_4; \\ A_{32} &= \left[ \frac{(\alpha^2 - 3\beta^2)A + B}{2\beta A(\alpha^2 + \beta^2)} R + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)A + B}{2\beta} \right] \Phi_1 + \left[ \frac{(\beta^2 - 3\alpha^2)A - B}{2\alpha A(\alpha^2 + \beta^2)} R - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)A - B}{2\alpha} \right] \Phi_3; \\ A_{33} &= \Phi_2 + \frac{A(\alpha^2 - \beta^2) + R}{2\alpha\beta A} \Phi_4; \quad A_{34} = \frac{A(\alpha^2 + \beta^2) + R}{2\beta A(\alpha^2 + \beta^2)} \Phi_1 + \frac{A(\alpha^2 + \beta^2) - R}{2\alpha A(\alpha^2 + \beta^2)} \Phi_3; \\ A_{41} &= \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(3\alpha^2 - \beta^2)A^2 + AB(3\alpha^2 + \beta^2) + R[A(\alpha^2 - 3\beta^2) + B]}{2\beta A} \Phi_1 + \\ &+ \frac{A^2(7\alpha^4 + \beta^4) + AB(\alpha^2 - \beta^2) - R[A(\beta^2 - 3\alpha^2) - B]}{2\alpha A} \Phi_3; \\ A_{42} &= \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2 A^2 + 2(\alpha^2 - \beta^2)AB + B^2}{2\alpha\beta A} \Phi_4; \\ A_{43} &= \frac{A(\alpha^2 - 3\beta^2) + B}{2\beta A} \Phi_1 + \frac{A(3\alpha^2 - \beta^2) + B}{2\alpha A} \Phi_3; \quad A_{44} = \Phi_2 + \frac{A(\alpha^2 - \beta^2) + B}{2\alpha\beta A} \Phi_4.\end{aligned}$$

Второй случай корней характеристического уравнения соответствует шарнирному закреплению продольных кромок.

При этом

$$K_{1-4} = \pm\sqrt{r^2}; \quad \Phi_1 = y \operatorname{ch} ry; \quad \Phi_2 = \operatorname{ch} ry; \quad \Phi_3 = \operatorname{sh} ry; \quad \Phi_4 = y \operatorname{sh} ry.$$

Третий случай корней характеристического уравнения соответствует свободным продольным кромкам пластины, при этом  $|s| < |r|$ , а корни — действительные и разные:

$$\lambda_1 = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - s^4}}; \quad \lambda_2 = \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - s^4}};$$

$$\Phi_1 = \operatorname{sh} \lambda_2 y; \quad \Phi_2 = \operatorname{ch} \lambda_1 y; \quad \Phi_3 = \operatorname{sh} \lambda_1 y; \quad \Phi_4 = \operatorname{ch} \lambda_2 y.$$

Четвертый вариант корней характеристического уравнения приводит к действительным и кратным корням:

$$K_{1,2} = 0; \quad K_{3,4} = \pm r_1; \quad r_1 = -2B/A; \quad \Phi_1 = \operatorname{sh} r_1 y; \quad \Phi_2 = 1; \quad \Phi_3 = y; \quad \Phi_4 = \operatorname{ch} r_1 y.$$

Для этих трех случаев также получены системы фундаментальных функций, которые не приведены ввиду ограниченного объема статьи.

Рассмотрим построение функции Грина. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (5) можно записать в виде [3]

$$Y = C_1 y_1(y) + C_2 y_2(y) + C_3 y_3(y) + C_4 y_4(y) + y_*(y). \quad (10)$$

Частное решение  $y_*(y)$  в (10) зависит от вида внешней нагрузки; его удобно представить как

$$y_*(y) = \int_0^y G(y, \xi) q(\xi) d\xi,$$

где  $G(y, \xi) = Y(y, \xi)H(y - \xi)$  — функция Грина;

$H(y - \xi)$  — функция Хевисайда.

Если заранее оговорить, что  $y > \xi$ , то  $H(y - \xi) = 1$  и тогда

$$Y(y, \xi) = C_1(\xi) y_1(y) + C_2(\xi) y_2(y) + C_3(\xi) y_3(y) + C_4(\xi) y_4(y). \quad (11)$$

Константы  $C_i(\xi)$  определяются из условия

$$\begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & y_3(\xi) & y_4(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) & y_3'(\xi) & y_4'(\xi) \\ y_1''(\xi) & y_2''(\xi) & y_3''(\xi) & y_4''(\xi) \\ y_1'''(\xi) & y_2'''(\xi) & y_3'''(\xi) & y_4'''(\xi) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/a_0 \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Здесь  $a_0 = 1$  — коэффициент при старшей степени дифференциального уравнения задачи.

Опуская промежуточные преобразования, окончательное выражение функции Грина имеет вид

$$G(y, \xi) = -\frac{1}{2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)} [\beta \operatorname{sh} \alpha(y - \xi) \cos \beta(y - \xi) - \alpha \operatorname{ch} \alpha(y - \xi) \sin \beta(y - \xi)],$$

или, с учетом приведенных выражений фундаментальных функций

$$G(y - \xi) = -AA_{14}(y - \xi). \quad (13)$$

Можно убедиться, что построенная функция  $G(y, \xi)$  обладает всеми свойствами, характерными для функции Грина:

—  $G(y, \xi) = 0$  при  $y < \xi$ ;

—  $G(y, \xi)$  как функция от  $y$  при фиксированном  $\xi$  в интервале  $(0, y_{\text{тр}})$ , за исключением точки  $y = \xi$ , удовлетворяют дифференциальному уравнению задачи;

—  $G(y, \xi)$  и ее производные по  $y$  до  $n$ -го порядка включительно непрерывны для  $y \in (0, y_{\text{тр}})$ , за исключением точки  $y = \xi$ , в которой производные по  $y$  непрерывны лишь до  $(n - 2)$  порядка, а  $(n - 1)$ -я производная имеет разрыв I рода со скачком

$$\left. \frac{d^{(n-1)} G(y, \xi)}{dy^{(n-1)}} \right|_{y=\xi+0} - \left. \frac{d^{(n-1)} G(y, \xi)}{dy^{(n-1)}} \right|_{y=\xi-0} = \frac{1}{a_0};$$

— при  $y = \xi$ ,

$$G(\xi, \xi) = G'(\xi, \xi) = \dots = G^{(n-2)}(\xi, \xi) = 0;$$

$$G^{(n-1)}(\xi, \xi) = \frac{1}{a_0} = 1;$$

—  $G(y, \xi)$  для дифференциального уравнения задачи (а это дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами) зависит только от разности  $(y - \xi)$ .

Выражение (13) и три его первые производные используются в дальнейшем при построении вектора нагрузки в соответствии с алгоритмом численно-аналитического метода граничных элементов.

Первые три производных функции Грина выражаются следующим образом:

$$G'(y - \xi) = -AA'_{14}(y - \xi) = -AA_{13}(y - \xi); \quad G''(y - \xi) = AA_{12}(y - \xi); \quad G'''(y - \xi) = AA_{11}(y - \xi). \quad (14)$$

Как и следовало ожидать, выражение функции Грина через нормированную фундаментальную функцию задачи не зависит от варианта корней характеристического уравнения, что подтверждается соответствующими математическими выкладками при трех остальных вариантах корней характеристического уравнения.

Заключительной частью аналитического этапа ЧА МГЭ является формирование вектора внешней нагрузки на пластину [1, 2]. Предварительно внешняя нагрузка (рис. 3), зависящая от двух переменных  $x$  и  $y$ , методом Канторовича-Власова преобразована к нагрузке, зависящей только от одной переменной  $y$ , при известной функции распределения вдоль оси  $OX$  системы координат.

При жестком защемлении продольных кромок, что соответствует первому варианту корней характеристического уравнения (5), получены аналитические выражения компонентов вектора нагрузки

$$B_{11} = -\frac{q(K_1 - K_2)}{s^4} + \frac{q}{s^4}[K_1 \Phi_2(y - d_H) - K_2 \Phi_2(y - d_K)] - \frac{qr^2}{2\alpha\beta s^4}[K_1 \Phi_4(y - d_H) - K_2 \Phi_4(y - d_K)] -$$

$$-\frac{FK_3}{2\alpha\beta s^2}[\beta \Phi_3(y - d_F) - \alpha \Phi_1(y - d_F)] + \frac{M_x K_4}{2\alpha\beta s^2}[\beta \Phi_3(y - d_{M_x}) - \alpha \Phi_1(y - d_{M_x})] - \frac{M_y K_5}{2\alpha\beta} \Phi_4(y - d_{M_y}).$$

$$B_{21} = -A \int_0^y A_{13}(y - \xi) q(\xi) d\xi = \frac{qK_1}{2\alpha\beta s^2}[\beta \Phi_3(y - d_H) - \alpha \Phi_1(y - d_H)] -$$

$$-\frac{qK_2}{2\alpha\beta s^2}[\beta \Phi_3(y - d_K) - \alpha \Phi_1(y - d_K)] +$$

$$+ \frac{FK_3}{2\alpha\beta} \Phi_4(y - d_F) - \frac{M_x K_4}{2\alpha\beta} \Phi_4(y - d_{M_x}) - \frac{M_y K_5}{2\alpha\beta} [\alpha \Phi_1(y - d_{M_y}) + \beta \Phi_3(y - d_{M_y})].$$

$$B_{31} = A \int_0^y A_{12}(y - \xi) q(\xi) d\xi = \frac{q(K_1 - K_2)}{s^4}(s^2 A + B) - \frac{q}{s^2}(2r^2 A + B)[K_1 \Phi_2(y - d_H) - K_2 \Phi_2(y - d_K)] +$$

$$+ \frac{q}{2\alpha\beta s^2}[(\alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4)A + r^2 B][K_1 \Phi_4(y - d_H) - K_2 \Phi_4(y - d_K)] +$$

$$+ \frac{FK_3}{2\alpha\beta s^2} \{ \alpha[(3\beta^2 - \alpha^2)A - B]\Phi_1(y - d_F) + \beta(3\alpha^2 - \beta^2)A + B \} \Phi_3(y - d_F) \} -$$

$$- \frac{M_x K_4}{2\alpha\beta s^2} \{ \alpha[(3\beta^2 - \alpha^2)A - B]\Phi_1(y - d_{M_x}) + \beta(3\alpha^2 - \beta^2)A + B \} \Phi_3(y - d_{M_x}) \} -$$

$$- \frac{M_y K_5}{2\alpha\beta} [2\alpha\beta A \Phi_2(y - d_{M_y}) - (r^2 A + B) \Phi_4(y - d_{M_y})];$$

$$\begin{aligned}
 B_{41} = A \int_0^y A_{11}(y-\xi)q(\xi)d\xi = & \frac{qK_1}{s^2} \left[ \frac{3r^2 A + R}{2\beta} \Phi_1(y-d_H) - \frac{(5\alpha^2 - \beta^2)A + R}{2\alpha} \Phi_3(y-d_H) \right] - \\
 & - \frac{qK_2}{s^2} \left[ \frac{3r^2 A + R}{2\beta} \Phi_1(y-d_K) - \frac{(5\alpha^2 - \beta^2)A + R}{2\alpha} \Phi_3(y-d_K) \right] + \\
 & + AFK_3 \left[ \Phi_2(y-d_F) + \frac{A(\beta^2 - 3\alpha^2) - R}{2\alpha\beta A} \Phi_4(y-d_F) \right] - \\
 & - AM_x K_4 \left[ \Phi_2(y-d_{M_x}) + \frac{A(\beta^2 - 3\alpha^2) - R}{2\alpha\beta A} \Phi_4(y-d_{M_x}) \right] + \\
 & + M_y K_5 \left[ \frac{A(\beta^2 + 3\alpha^2) + R}{2\beta} \Phi_1(y-d_{M_y}) + \frac{r^2 A + R}{2\alpha} \Phi_3(y-d_{M_y}) \right].
 \end{aligned}$$

Здесь введены дополнительные обозначения:

$$K_1 = \frac{l_1}{A\omega_1} \left[ -\cos \omega_1 + \cos \frac{\omega_1 c_H}{l_1} - \operatorname{ch} \omega_1 + \operatorname{ch} \frac{\omega_1 c_H}{l_1} - \alpha_* \left( \sin \omega_1 - \sin \frac{\omega_1 c_H}{l_1} - \operatorname{sh} \omega_1 + \operatorname{sh} \frac{\omega_1 c_H}{l_1} \right) \right];$$

$$K_2 = \frac{l_1}{A\omega_1} \left[ -\cos \omega_1 + \cos \frac{\omega_1 c_K}{l_1} - \operatorname{ch} \omega_1 + \operatorname{ch} \frac{\omega_1 c_K}{l_1} - \alpha_* \left( \sin \omega_1 - \sin \frac{\omega_1 c_K}{l_1} - \operatorname{sh} \omega_1 + \operatorname{sh} \frac{\omega_1 c_K}{l_1} \right) \right];$$

$$K_3 = \frac{1}{A} \left[ \sin \frac{\omega_1 c_F}{l_1} - \operatorname{sh} \frac{\omega_1 c_F}{l_1} - \alpha_* \left( \cos \frac{\omega_1 c_F}{l_1} - \operatorname{ch} \frac{\omega_1 c_F}{l_1} \right) \right];$$

$$K_4 = \frac{\omega_1}{Al_1} \left[ \cos \frac{\omega_1 c_{M_x}}{l_1} - \operatorname{ch} \frac{\omega_1 c_{M_x}}{l_1} + \alpha_* \left( \sin \frac{\omega_1 c_{M_x}}{l_1} + \operatorname{sh} \frac{\omega_1 c_{M_x}}{l_1} \right) \right];$$

$$K_5 = \frac{1}{A} \left[ \sin \frac{\omega_1 c_{M_y}}{l_1} - \operatorname{sh} \frac{\omega_1 c_{M_y}}{l_1} - \alpha_* \left( \cos \frac{\omega_1 c_{M_y}}{l_1} - \operatorname{ch} \frac{\omega_1 c_{M_y}}{l_1} \right) \right].$$

Аналогичные выражения получены при других трех вариантах корней характеристического уравнения.

**Выводы.** Полученные аналитические зависимости были использованы для расчета ортотропной плиты класса OSB/3 (EN 300 “Определения, классификация и технические характеристики”, EN 13986 @=“Панели из древесных материалов для применения в строительстве — характеристики, оценка соответствия и маркировка”). Рассматривалась плита (пластина) размерами 500x500x8 мм при двух вариантах граничных условий шарнирное опирание по всему контуру и жесткое защемление пластины по трем сторонам при свободной четвертой стороне. Для каждого варианта рассмотрены два вида внешней нагрузки: сосредоточенная сила, приложенная в центре пластинки? и нагрузка, равномерно распределенная по всей поверхности. Определению подлежали прогибы и напряжения в ряде характерных (контрольных) точек. Численная реализация алгоритма расчета проведена в свободно распространяемом пакете SKILAB. С целью верификации полученных результатов эти же расчеты выполнены методом конечных элементов в пакете ANSYS [4]. Расхождение величин напряжений и перемещений, вычисленных двумя методами, не превышает 4 %.

Таким образом, использование численно-аналитического метода граничных элементов позволяет получить решение задачи об изгибе прямоугольной ортотропной пластины при любом характере внешних нагрузок и условий закрепления кромок пластины.



**Литература**

1. Численно-аналитический метод граничных элементов: Монография / А.Ф. Дашенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов. — В 2 т. — Одесса: ВМБ, 2010. — Т. 1. — 416 с. — Т. 2. — 512 с.
2. Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций [Текст]: монография / А.Б. Золотов [и др.]. — М.: МГСУ: Изд-во АСВ, 2009. — 336 с.
3. Mortici, C. Functional Methods in Modern Analysis [Text]: монография / C. Mortici; Timisoara Univ. de Vest; Fac. de mat. — Timisoara: [s. n.], 2001. — 218 p.
4. Дашенко, А.Ф. ANSYS в задачах инженерной механики: монография / А.Ф. Дашенко, Д.В. Лазарева, Н.Г. Сурьянинов; ред. Н.Г. Сурьянинов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Харьков: БУРУН и К, 2011. — 504 с.

**References**

1. Chislenno-analitieskiy metod granichnykh elementov [Numerical-analytical boundary elements method] / Dashchenko A.F., Kolomiyets L.V., Orobey V.F., Surianinov N. G. — In 2 volumes. — Odessa, 2010. — Vol.1 — 416 p. — Vol. 2 — 512 p.
2. Chislennye i analiticheskie metody rascheta stroitel'nykh konstruksiy [Text]: monografiya [Numerical and analytical methods for design of structures [Text]: monograph] / A.B. Zolotov [and others]. — Moscow, 2009. — 336 p.
3. Mortici, C. Functional Methods in Modern Analysis [Text]: monograph / C. Mortici; Timisoara Univ. de Vest; Fac. de mat. — Timisoara: [s. n.], 2001. — 218 p.
4. Dashchenko, A.F. ANSYS v zadachakh inzhenernoy mekhaniki: monografiya [ANSYS in problems of engineering mechanics [Text]: monograph] / A.F. Dashchenko, D.V. Lazareva, N.G. Surianinov; edited by N.G. Surianinov. — the 2<sup>nd</sup> edition, revised and enlarged. — Khar'kov, 2011. — 504 p.

**АНОТАЦІЯ / АННОТАЦИЯ / ABSTRACT**

*М.Г. Сур'янінов, І.В. Павленко. Додаток чисельно-аналітичного методу граничних елементів до розрахунку ортотропних пластин.* Викладено розв'язання задачі про вигин ортотропних пластин чисельно-аналітичним методом граничних елементів. Для зниження мірності задачі використано варіаційний метод Канторовича-Власова. Отримано аналітичні вирази фундаментальних функцій, функції Гріна і компонентів навантаження для всіх можливих коренів характеристичного рівняння, відповідного диференціального рівняння вигину пластини. Розглянуто приклади розрахунку. Розглядалася квадратна плита (пластина) OSB при двох варіантах граничних умов. Для кожного варіанту розглянуто два види зовнішнього навантаження: зосереджена сила, прикладена в центрі пластинки, і навантаження, рівномірно розподілене по всій поверхні. Визначенню підлягали прогини і напруження в ряді характерних точок. Чисельну реалізацію алгоритму розрахунку проведено у пакеті SKILAB. Запропонований підхід дозволяє отримати розв'язання задачі про вигин прямокутної ортотропної пластини при будь-якому характері зовнішніх навантажень і будь-яких умовах закріплення кромки пластини.

*Ключові слова:* метод граничних елементів, фундаментальна функція, функція Гріна, ортотропна плита, SKILAB, ANSYS.

*Н.Г. Сурьянинов, И.В. Павленко. Приложение численно-аналитического метода граничных элементов к расчету ортотропных пластин.* Изложено решение задачи об изгибе ортотропных пластин численно-аналитическим методом граничных элементов. Для понижения мерности задачи использован вариационный метод Канторовича-Власова. Получены аналитические выражения фундаментальных функций, функции Грина и компонентов нагрузки для всех возможных корней характеристического уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению изгиба пластины. Рассмотрены примеры расчета. Рассматривалась квадратная плита (пластина) OSB при двух вариантах граничных условий. Для каждого варианта рассмотрены два вида внешней нагрузки: сосредоточенная сила, приложенная в центре пластинки, и нагрузка, равномерно распределенная по всей поверхности. Определены поддежали прогибы и напряжения в ряде характерных точек. Численная реализация алгоритма расчета проведена в пакете SKILAB. Предложенный подход позволяет получить решение задачи об изгибе прямоугольной ортотропной пластины при любом характере внешних нагрузок и условий закрепления кромки пластины.

*Ключевые слова:* метод граничных элементов, фундаментальная функция, функция Грина, ортотропная плита, SKILAB, ANSYS.

*N.G. Suryaninov, I.V. Pavlenko. Application of numerical-analytical boundary element method to the calculation of orthotropic plates.* The solution of the problem of bending of orthotropic plates using numerical-analytical boundary element method is given. To reduce the dimensionality of the problem variational method of Kantorovich-Vlasov is used. The analytical expressions of the fundamental functions, Green's functions and components of the load for all possible roots of the characteristic equation corresponding to the differential equation of plate bending are obtained. Examples of calcula-

tion are considered. Square plate OSB was considered with two versions of the boundary conditions. For each option two types of external load were considered: concentrated force applied at the center of the plate and the load uniformly distributed over the entire surface. Bending and tension in some characteristic points had to be determined. Numerical implementation of the algorithm for calculating is held in package SKILAB. The proposed approach provides a solution to the problem of bending of rectangular orthotropic plate with any character of external loads and fixing conditions of plate edges.

*Keywords:* boundary element method, the fundamental function, the Green's function, orthotropic plate, SKILAB, ANSYS.

Рецензент д-р техн. наук., проф. Одес. нац. политехн. ун-та Сидоренко И.И.

Поступила в редакцію 4 марта 2014 г.

УДК 621.81:621.88.07

**В.М. Кобслев**, канд. техн. наук, доц., Одес. нац. акад. харч. технологій

## ВПЛИВ ПОХИБОК РОЗМІРІВ ТА ФОРМИ ПОВЕРХОНЬ ДЕТАЛЕЙ НА ХАРАКТЕР ЇХ З'ЄДНАННЯ

**Вступ.** Virішення питань точності та характеру з'єднань є невід'ємною складовою проектування машин. Обґрунтований вибір потрібних допусків та посадок особливо важливий в умовах серійного та масового виробництва, де питання точності пов'язані з дією ймовірнісних законів розподілу похибок виготовлення деталей. Визначення характеру з'єднання у стандартних перехідних посадках — наявності зазору чи натягу, що суттєво залежить від випадкових і систематичних похибок розмірів та форми поверхонь деталей, є актуальною і важливою науково-практичною задачею.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Розроблені залежності для розрахунку допусків та рекомендації до складання розрахункових схем і розмірного аналізу конструкцій [1]. Окремого розглядання питань, пов'язаних з перехідними посадками, ця робота не ставить. Відома методика розрахунку ймовірності зазорів та натягів для перехідних посадок в залежності від розмірів деталей оснований на таких припущеннях [2]:

- розподіл розмірів підлягає нормальному закону;
- центри групування деталей співпадають з серединами полів допусків, що свідчить про відсутність систематичних похибок;
- середньоквадратичні відхилення розмірів отвору  $\sigma_D$  і вала  $\sigma_d$  складають 1/6 відповідних допусків  $T_D$  та  $T_d$ ;
- розкид розмірів отвору та вала не залежить один від одного і тому середньоквадратичне відхилення посадки  $\sigma_{SN}$  визначається як

$$\sigma_{SN} = \sqrt{\sigma_D^2 + \sigma_d^2} = \frac{1}{6} \sqrt{T_D^2 + T_d^2},$$

де  $\sigma_D$  — розмір отвору;

$\sigma_d$  — розмір валу;

$T_D$  — допуск розміру для отвору;

$T_d$  — допуск розміру для валу.

DOI: 10.15276/opu.1.43.2014.05

© В.М. Кобслев, 2014